EXERCICE N°1 : 25' 5 points

Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1°) Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive notée F de $f(x)$ telle que $F(0) = 0$.

2°) Montrer que la fonction F est impaire.

3°) Soit G la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x)=F(\sin x)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $G'(x)$.

b) En déduire que : pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$; $G(x)=x$.

c) Calculer $F\left(\dfrac{1}{2}\right);F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right);F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4°) Soit la fonction $H(x)=F\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$. Montrer que H est dérivable sur $IR_+^* \setminus \{1\}$, et calculer $H'(x)$.

EXERCICE N°2 : 30' 5 points

Soit $f:[-2;2]\to IR\ x\mapsto (x-2)\sqrt{4-x^2}$.

1°) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ \vec{j})$.

2°) Prouver que f admet une primitive sur $[-2;2]$. Soit F la primitive de f sur $[-2;2]$ telle que F(0)=0.

3°) Soit g la fonction définie sur I = $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $g(x)=F(2\sin x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur I.

b) Calculer $g'(x)$ et $g(0)$.

4°) Déterminer une primitive de chacune des fonctions g_1 et g_2 définie sur IR par: $g_1(x)=\sin x.\cos^2 x$

et $g_2(x)=\cos^2 x$

5°) En déduire $g(x)$ et calculer $F(-2)-F(2)$.

EXERCICE N°3 : | 30' | 5 points

Soit f la fonction définie sur $]-\infty,1]$ par : $f(x)=\dfrac{-2}{x^2-2x+2}$ et F la primitive de f sur $]-\infty,1]$ qui s'annule en 1.

1°) On désigne par G la fonction définie sur $[0,\pi[$ par $G(x)=F\left(1-\tan\dfrac{x}{2}\right)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $[0,\pi[$ et calculer $G'(x)$.

b) Déterminer $G(x)$ pour tout $x\in[0,\pi[$ puis calculer $F(0)$.

2°) Soit H la fonction définie sur $]-\infty,1[$ par : $H(x)=F(x)+F\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

a) Montrer que H est dérivable sur $]-\infty,1[$ et calculer $H'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x\in]-\infty,1[$ on a : $F\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\pi-F(x)$.

3°) Soit u la suite réelle définie sur IN par : $u_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}F\left(\dfrac{1}{k}\right)$.

a) Montrer que pour tout $n\in IN^*$ et $k\in\{n,n+1,.....,2n\}$ on a : $F\left(\dfrac{1}{n}\right)\le F\left(\dfrac{1}{k}\right)\le F\left(\dfrac{1}{2n}\right)$.

b) En déduire la limite de u_n en $+\infty$.

EXERCICE N°4 : | 20' | 4 points

Soit f la fonction définie sur $[0;\pi]$ par $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$.

1°) Montrer que f est une bijection de $[0;\pi]$ sur $\left[0;\sqrt{2}\right]$. (On notera f^{-1} la fonction réciproque de f)

2°) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0;\sqrt{2}[$ et expliciter $(f^{-1})'(x)$.

3°) Soit g la fonction définie sur $]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$ par $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$ et G la primitive de g sur $]-\sqrt{2};\sqrt{2}[$ qui s'annule en zéro.

a) Calculer la dérivée de la fonction $H:x\mapsto g(x)-g(-x)$. En déduire que g est paire.

b) Montrer que pour tout x $\in\left[0,\sqrt{2}\right[$; $G(x)=\pi-f^{-1}(x)$. En déduire $G(1)$.

EXERCICE N°5 : | 15' | 3 points

Déterminer une fonction polynôme P dont la fonction dérivée est : $P'(x)=x^2-5x+6$

et dont le maximum relatif est le double du minimum relatif.